Métodos Matemáticos I

Universidade de Santiago de Compostela

11 de septiembre de 2023

Capítulo 1:
El sistema de los números reales y el de los complejos.

Axiomas de cuerpo de los números reales.

En lo que sigue, x, y, z serán números reales arbitrarios mientras no se especifique alguna condición especial. Suponemos, junto con $\mathbb{R}$, la existencia de dos operaciones internas (suma y producto) tales que $x + y \in \mathbb{R}$ y $xy \in \mathbb{R}$ para todo par x, y de $\mathbb{R}$

Axiomas de cuerpo de los números reales.

En lo que sigue, x, y, z serán números reales arbitrarios mientras no se especifique alguna condición especial. Suponemos, junto con $\mathbb{R}$, la existencia de dos operaciones internas (suma y producto) tales que $x + y \in \mathbb{R}$ y $xy \in \mathbb{R}$ para todo par x, y de $\mathbb{R}$

Axioma 1 (Leyes conmutativas)

$x + y = y + x, \quad xy = yx.$

Axiomas de cuerpo de los números reales.

En lo que sigue, x, y, z serán números reales arbitrarios mientras no se especifique alguna condición especial. Suponemos, junto con $\mathbb{R}$, la existencia de dos operaciones internas (suma y producto) tales que $x + y \in \mathbb{R}$ y $xy \in \mathbb{R}$ para todo par x, y de $\mathbb{R}$

Axioma 1 (Leyes conmutativas)

$x + y = y + x, \quad xy = yx.$

Axioma 2 (Leyes asociativas)

$x + (y + z) = (x + y) + z, \quad x(yz) = (xy)z.$

Axiomas de cuerpo de los números reales.

En lo que sigue, x, y, z serán números reales arbitrarios mientras no se especifique alguna condición especial. Suponemos, junto con $\mathbb{R}$, la existencia de dos operaciones internas (suma y producto) tales que $x + y \in \mathbb{R}$ y $xy \in \mathbb{R}$ para todo par x, y de $\mathbb{R}$

Axioma 1 (Leyes conmutativas)

$x + y = y + x, \quad xy = yx.$

Axioma 2 (Leyes asociativas)

$x + (y + z) = (x + y) + z, \quad x(yz) = (xy)z.$

Axioma 3 (Ley ditributiva)

$x(y + z) = xy + xz. \qquad$ *(ley distributiva).*

Axioma 4

Dados x *e* y*, existe un* z *tal que* $x + z = y$*. Dicho número se designará por* $y - x$*, y* $x - x$ *se escribirá como* 0*, que es independiente de* x*. Escribiremos* $-x$ *en lugar de* $0 - x$*. Al elemento* $-x$ *se le llamará opuesto de* x*.*

Axioma 4

Dados x e y, existe un z tal que $x + z = y$. Dicho número se designará por $y - x$, y $x - x$ se escribirá como 0, que es independiente de x. Escribiremos $-x$ en lugar de $0 - x$. Al elemento $-x$ se le llamará opuesto de x.

Axioma 5

Existe, por lo menos, un número real $x \neq 0$. Dados dos números reales x e y, con $x \neq 0$, entonces existe un z tal que $xz = y$, que designaremos por y/x. El número x/x se escribirá como 1 y es independiente de x. Podremos escribir x^{-1} en lugar de $1/x$ si $x \neq 0$. Al elemento x^{-1} lo llamaremos recíproco o inverso de x.

Axioma 4

Dados x e y, existe un z tal que $x + z = y$. Dicho número se designará por $y - x$, y $x - x$ se escribirá como 0, que es independiente de x. Escribiremos $-x$ en lugar de $0 - x$. Al elemento $-x$ se le llamará opuesto de x.

Axioma 5

Existe, por lo menos, un número real $x \neq 0$. Dados dos números reales x e y, con $x \neq 0$, entonces existe un z tal que $xz = y$, que designaremos por y/x. El número x/x se escribirá como 1 y es independiente de x. Podremos escribir x^{-1} en lugar de $1/x$ si $x \neq 0$. Al elemento x^{-1} lo llamaremos recíproco o inverso de x.

A partir de estos cinco axiomas se pueden deducir todas las reglas usuales de la aritmética.

Axiomas de orden de los números reales.

Suponemos la existencia de una relación denotada por $<$, que establece una ordenación entre los números reales y que satisface los siguientes axiomas.

Axiomas de orden de los números reales.

Suponemos la existencia de una relación denotada por $<$, que establece una ordenación entre los números reales y que satisface los siguientes axiomas.

Axioma 6

Se verifica una, y sólo una, de las siguientes relaciones para todo $x, y \in \mathbb{R}$: $\boxed{x = y}$, $\boxed{x < y}$, $\boxed{x > y}$.

- *La expresión* $\boxed{x > y}$ *significa lo mismo que* $\boxed{y < x}$.

Axiomas de orden de los números reales.

Suponemos la existencia de una relación denotada por $<$, que establece una ordenación entre los números reales y que satisface los siguientes axiomas.

Axioma 6

Se verifica una, y sólo una, de las siguientes relaciones para todo $x, y \in \mathbb{R}$*:* $\boxed{x = y}$, $\boxed{x < y}$, $\boxed{x > y}$.

- *La expresión* $\boxed{x > y}$ *significa lo mismo que* $\boxed{y < x}$.

Axioma 7

Si $x < y$*, entonces para todo* z *se cumple* $x + z < y + z$.

Axiomas de orden de los números reales.

Axioma 8

Si $x > 0$, *e* $y > 0$, *entonces* $xy > 0$.

Axiomas de orden de los números reales.

Axioma 8

Si $x > 0$, *e* $y > 0$, *entonces* $xy > 0$.

Axioma 9

Si $x > y$, *e* $y > z$, *entonces* $x > z$.

Definición 1

Si $x > 0$ diremos que x es positivo. Si $x < 0$ diremos que x es negativo. Denotaremos $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ y $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$. Se usa la notación $x \leq y$ para abreviar la condición $x < y$ ó $x = y$.

- La notación $\{x \mid x \text{ verifica } P\}$ representa el conjunto de todos los elementos x que verifican la propiedad P. También se suele escribir como $\{x \,:\, x \text{ verifica } P\}$.

- Falta por enunciar el décimo axioma (*de completitud*) pero lo haremos después de introducir la noción de *supremo* de un conjunto de números reales.

Teorema 1

Si a y b son números reales tales que $a \leq b + \varepsilon$ *para todo* $\varepsilon > 0$*, entonces se cumple que* $a \leq b$.

Teorema 1

Si a y b son números reales tales que $a \leq b + \varepsilon$ *para* *todo* $\varepsilon > 0$, *entonces se cumple que* $a \leq b$.

Demostración

Supongamos, en contra de lo que asegura el teorema, que fuese $b < a$. Entonces si tomamos $\varepsilon = (a - b)/2$ tendríamos

$$b + \varepsilon = b + \frac{a - b}{2} = \frac{a + b}{2} < \frac{a + a}{2} = a.$$

Esto es lo mismo que escribir $a > b + \varepsilon$, en contra de la hipótesis inicial del teorema.

Intervalos en la recta real.

- Los números reales pueden ser representados geométricamente como puntos de una recta, denominada *recta real*, en la que la relación de orden que hemos definido tiene una interpretación geométrica simple: $x < y$ significa que x está a la izquierda de y, mientras que $x > y$ significa que está a la derecha.

Intervalos en la recta real.

- Los números reales pueden ser representados geométricamente como puntos de una recta, denominada *recta real*, en la que la relación de orden que hemos definido tiene una interpretación geométrica simple: $x < y$ significa que x está a la izquierda de y, mientras que $x > y$ significa que está a la derecha.

  Definimos a continuación los distintos tipos de intervalos en la recta real.

Intervalos en la recta real.

- Intervalo abierto: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.

Intervalos en la recta real.

- Intervalo abierto: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.
- Intervalo cerrado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.

Intervalos en la recta real.

- Intervalo abierto: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.
- Intervalo cerrado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.
- Intervalos semiabiertos: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.

Intervalos en la recta real.

- Intervalo abierto: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.

- Intervalo cerrado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.

- Intervalos semiabiertos: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.

- Intervalos infinitos: $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$, $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$, $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$, $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$, $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Intervalos en la recta real.

- Intervalo abierto: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.

- Intervalo cerrado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.

- Intervalos semiabiertos: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.

- Intervalos infinitos: $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$, $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$, $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$, $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$, $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

- Los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ se usan aquí como mera notación, pero los definiremos adecuadamente más adelante.

Los números enteros

Introducimos los números enteros como un subconjunto de números reales con propiedades especiales.

Los números enteros

Introducimos los números enteros como un subconjunto de números reales con propiedades especiales.

Definición 2

Un conjunto de números reales se denomina conjunto inductivo si cumple las dos propiedades siguientes:

(a) *El número* 1 *está en el conjunto.*

(b) *Para todo* x *del conjunto, el número* $x+1$ *también está en el conjunto.*

Los números enteros

Introducimos los números enteros como un subconjunto de números reales con propiedades especiales.

Definición 2

Un conjunto de números reales se denomina conjunto inductivo si cumple las dos propiedades siguientes:

(a) *El número* 1 *está en el conjunto.*

(b) *Para todo* x *del conjunto, el número* $x + 1$ *también está en el conjunto.*

Definición 3

Un número real se denomina entero positivo si pertenece a cada uno de los conjuntos inductivos de $\mathbb{R}$*.*

- Denotaremos al conjunto de los enteros positivos por $\mathbb{Z}^+$.

[1] En realidad no existe un consenso completo sobre la definición de $\mathbb{N}$ en el aspecto de la inclusión o no del número 0, por ello nosotros usaremos en lo sucesivo el símbolo $\mathbb{Z}^+$ para evitar equívocos siempre que nos refiramos al conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

- Denotaremos al conjunto de los enteros positivos por $\mathbb{Z}^+$.
- A los enteros positivos también se les suele llamar números naturales[1], en cuyo caso el conjunto se denota por $\mathbb{N}$.

[1] En realidad no existe un consenso completo sobre la definición de $\mathbb{N}$ en el aspecto de la inclusión o no del número 0, por ello nosotros usaremos en lo sucesivo el símbolo $\mathbb{Z}^+$ para evitar equívocos siempre que nos refiramos al conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

- Denotaremos al conjunto de los enteros positivos por $\mathbb{Z}^+$.
- A los enteros positivos también se les suele llamar números naturales[1], en cuyo caso el conjunto se denota por $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}^+$ es también, él mismo, un conjunto inductivo. $\mathbb{Z}^+$ es un subconjunto de todos los conjuntos inductivos. A esta propiedad de $\mathbb{Z}^+$ se le suele llamar *principio de inducción*.

[1] En realidad no existe un consenso completo sobre la definición de $\mathbb{N}$ en el aspecto de la inclusión o no del número 0, por ello nosotros usaremos en lo sucesivo el símbolo $\mathbb{Z}^+$ para evitar equívocos siempre que nos refiramos al conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

- Denotaremos al conjunto de los enteros positivos por $\mathbb{Z}^+$.
- A los enteros positivos también se les suele llamar números naturales[1], en cuyo caso el conjunto se denota por $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}^+$ es también, él mismo, un conjunto inductivo. $\mathbb{Z}^+$ es un subconjunto de todos los conjuntos inductivos. A esta propiedad de $\mathbb{Z}^+$ se le suele llamar *principio de inducción*.
- Los opuestos de los enteros positivos se llaman enteros negativos, $\mathbb{Z}^-$. El conjunto de todos los enteros es la unión de estos tres: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$.

[1] En realidad no existe un consenso completo sobre la definición de $\mathbb{N}$ en el aspecto de la inclusión o no del número 0, por ello nosotros usaremos en lo sucesivo el símbolo $\mathbb{Z}^+$ para evitar equívocos siempre que nos refiramos al conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

El símbolo sumatorio.

La suma $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$ puede escribirse abreviadamente por medio del símbolo sumatorio, para el que usamos la letra griega Σ:

$$S = \sum_{k=1}^{7} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

El símbolo sumatorio.

La suma $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$ puede escribirse abreviadamente por medio del símbolo sumatorio, para el que usamos la letra griega Σ:

$$S = \sum_{k=1}^{7} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

De modo más general, cuando queramos sumar un conjunto de n números arbitrarios, que podemos denotar por $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, escribiremos

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Demostración por inducción.

- Para ilustrar la técnica matemática de *demostración por inducción* vamos a probar la validez de la fórmula

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Demostración por inducción.

- Para ilustrar la técnica matemática de *demostración por inducción* vamos a probar la validez de la fórmula

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- La demostración consta de dos pasos, primero comprobamos la validez de la fórmula para $n = 1$ y luego comprobamos que si la fórmula es cierta para n entonces también lo es para $n + 1$.

Demostración por inducción.

- Para ilustrar la técnica matemática de *demostración por inducción* vamos a probar la validez de la fórmula

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- La demostración consta de dos pasos, primero comprobamos la validez de la fórmula para $n = 1$ y luego comprobamos que si la fórmula es cierta para n entonces también lo es para $n + 1$.
- En el caso que nos ocupa es obvio que la fórmula se verifica para $n = 1$, ahora veamos si la siguiente implicación es cierta:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \overset{?}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

En efecto, es cierta porque

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

En efecto, es cierta porque

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Definición 4 (números primos)

Dado $n \in \mathbb{Z}^+$, $n > 1$, se denomina primo si no tiene divisores distintos de él mismo. En caso contrario se denomina compuesto.

Teorema 2

No existe un número primo máximo.

Teorema 2

No existe un número primo máximo.

Demostración.

Supongamos que existe un número finito de primos, $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Formamos entonces un nuevo número multiplicando todos los n primos y sumándole la unidad:

$$q = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$$

El número q así formado es primo, y además es mayor que cualquiera de los anteriores. Hemos llegado entonces a un absurdo, de donde deducimos que la hipótesis inicial (número finito de primos) es falsa. $\square$

Teorema 3 (Descomposición única de enteros.)

Todo entero $n > 1$ puede ser representado como un producto de factores primos. Si se prescinde del orden, la descomposición es única.

Teorema 3 (Descomposición única de enteros.)

Todo entero $n > 1$ puede ser representado como un producto de factores primos. Si se prescinde del orden, la descomposición es única.

Esto quiere decir que, dado $z \in \mathbb{Z}^+$, $z > 1$, podremos escribirlo como un producto único de una cierta secuencia de números primos, cada uno de ellos elevado a una potencia $x_i \geq 1$: $z = p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3} \ldots p_N^{x_N}$.
Ejemplo: $z = 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^3 \cdot 17^2 = 4460715$.

Números racionales

Definición 5

Los cocientes de números enteros, a/b, con $b \neq 0$, se denominan números racionales. Simbólicamente:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, \quad b \neq 0 \right\}$$

Números racionales

Definición 5

Los cocientes de números enteros, a/b, con $b \neq 0$, se denominan números racionales. Simbólicamente:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, \quad b \neq 0 \right\}$$

Si $a, b \in \mathbb{Q}$, entonces $(a+b)/2 \in \mathbb{Q}$, lo cual implica que entre cualquier par de números racionales hay una infinidad de números racionales, y no es posible hablar del número racional *inmediatamente inferior o posterior* a un número racional dado. $\mathbb{Q}$ es un cuerpo. $\mathbb{Z}$ no es un cuerpo porque el inverso de un entero no es en general un entero.

Números irracionales

Definición 6

Si $x \in \mathbb{R}$ *y* $x \notin \mathbb{Q}$*, entonces* x *es un número irracional.*

$$\mathbb{I} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\}$$

Números irracionales

Definición 6

Si $x \in \mathbb{R}$ y $x \notin \mathbb{Q}$, entonces x es un número irracional.

$$\mathbb{I} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\}$$

Teorema 4

Si $n \in \mathbb{Z}^+$ y no es un cuadrado perfecto, entonces $\sqrt{n}$ es irracional.

Números irracionales

Definición 6

Si $x \in \mathbb{R}$ y $x \notin \mathbb{Q}$, entonces x es un número irracional.

$$\mathbb{I} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\}$$

Teorema 4

Si $n \in \mathbb{Z}^+$ y no es un cuadrado perfecto, entonces $\sqrt{n}$ es irracional.

Demostración (I)

- Consideremos en primer lugar el caso de que n no tenga ningún divisor > 1 que sea cuadrado perfecto. Si suponemos que $\sqrt{n}$ es racional llegaremos a una contradicción.

Demostración (II)

- En efecto, si escribimos $\sqrt{n} = a/b$ donde a y b son enteros sin divisores comunes, tenemos $a^2 = b^2 n$ y podemos en consecuencia afirmar que a^2 es un múltiplo de n. Esto significa que a también es un múltiplo de n, porque n no tiene divisores que sean cuadrados perfectos.

Demostración (II)

- En efecto, si escribimos $\sqrt{n} = a/b$ donde a y b son enteros sin divisores comunes, tenemos $a^2 = b^2 n$ y podemos en consecuencia afirmar que a^2 es un múltiplo de n. Esto significa que a también es un múltiplo de n, porque n no tiene divisores que sean cuadrados perfectos.

- Para ver esto descomponemos a en factores primos, es decir, $a = a_1^{x_1} a_2^{x_2} a_3^{x_3} \ldots a_p^{x_p}$, siendo cada $x_i \geq 1$, con $i = 1, 2, \ldots, p$. Entonces $a^2 = a_1^{2x_1} a_2^{2x_2} a_3^{2x_3} \ldots a_p^{2x_p}$, y como a^2 es múltiplo de n, escribimos $n = a_1^{y_1} a_2^{y_2} a_3^{y_3} \ldots a_p^{y_p}$, siendo $y_i \leq 1$ por no tener ningún divisor que sea cuadrado perfecto. Esto implica que la descomposición en factores primos de n está contenida en la de a; en otras palabras, a es múltiplo de n.

Demostración (III)

- Escribimos entonces $a = cn$, siendo c un entero. La ecuación $a^2 = b^2 n$ se transforma en $c^2 n^2 = b^2 n$, ó bien $b^2 = c^2 n$. Por lo tanto b^2 es un múltiplo de n y, razonando igual que el en párrafo anterior deducimos que b es también un múltiplo de n. Llegamos a la conclusión de que tanto a como b son múltiplos de n, es decir, que n es un divisor común de a y b, cosa que contradice nuestra hipótesis de partida.

Demostración (IV)

- Para finalizar, consideremos ahora el caso de que n sí tenga un divisor que sea cuadrado perfecto, es decir, $n = m^2 k$, siendo $k > 1$ un entero que no tiene divisores > 1 que sean cuadrados perfectos[a]. Entonces $\sqrt{n} = m\sqrt{k}$, lo cual quiere decir que si $\sqrt{n}$ fuese racional, $\sqrt{k}$ también lo sería, cosa que contradice la primera parte de la demostración.

Demostración (IV)

- Para finalizar, consideremos ahora el caso de que n sí tenga un divisor que sea cuadrado perfecto, es decir, $n = m^2 k$, siendo $k > 1$ un entero que no tiene divisores > 1 que sean cuadrados perfectos[a]. Entonces $\sqrt{n} = m\sqrt{k}$, lo cual quiere decir que si $\sqrt{n}$ fuese racional, $\sqrt{k}$ también lo sería, cosa que contradice la primera parte de la demostración.

[a] Obsérvese que aunque n tenga varios divisores que sean cuadrados perfectos, siempre se puede escribir como $n = m^2 k$, siendo $k > 1$ un entero que no tiene divisores > 1 que sean cuadrados perfectos.

- Este teorema puede generalizarse sin dificultad para afirmar que si $n \in \mathbb{Z}^+$ y no es una potencia m–ésima perfecta, entonces $\sqrt[m]{n}$ es irracional.

Cotas. Elemento máximo y mínimo.

Definición 7

Sea $S \subset \mathbb{R}$*. Si existe un* $b \in \mathbb{R}$ *tal que* $x \leq b$ *para todo* $x \in S$*, entonces* b *es una cota superior de* S*. Se dice que* S *está acotado superiormente por* b*.*

Cotas. Elemento máximo y mínimo.

Definición 7

Sea $S \subset \mathbb{R}$. Si existe un $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in S$, entonces b es una cota superior de S. Se dice que S está acotado superiormente por b.

- Cualquier $c > b$ es también una cota superior de S. Si b es una cota superior de S y además es un elemento de S, es decir, $b \in S$, entonces a b se le llama elemento máximo de S o **máximo**, y se suele denotar por $\max(S)$. Un conjunto que no tenga cotas superiores se dice no acotado superiormente. Los términos cota inferior, acotado inferiormente y elemento mínimo, o simplemente **mínimo**, se definen de manera análoga.

- Ejemplos:
  $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ no tiene mínimo ni cotas superiores, pero sí cotas inferiores. $S = [0, 1]$ está acotado superior e inferiormente, además $\max(S) = 1$ y $\min(S) = 0$. El conjunto $S = [0, 1)$ no tiene máximo, está acotado y $\min(S) = 0$.

Supremo e Ínfimo.

Definición 8

Sea $S \subset \mathbb{R}$ *acotado superiormente.* $b \in \mathbb{R}$ *se denomina extremo superior ó supremo, y se designa por* $\sup(S)$, *si verifica estas dos propiedades:*

(a) b *es una cota superior de* S.

(b) *Ningún número menor que* b *es una cota superior de* S.

Supremo e Ínfimo.

Definición 8

Sea $S \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente. $b \in \mathbb{R}$ se denomina extremo superior ó supremo, y se designa por $\sup(S)$, si verifica estas dos propiedades:

(a) *b es una cota superior de S.*

(b) *Ningún número menor que b es una cota superior de S.*

Por ejemplo, $\sup[0,1) = 1$, pero no tiene máximo, o elemento máximo. El concepto de extremo inferior de S, o ínfimo, se define análogamente. Se denota por $\text{ínf}(S)$. El supremo de un conjunto es la menor de sus cotas superiores, y el ínfimo es la mayor de sus cotas inferiores. El $\sup(S)$ y el $\text{ínf}(S)$ no tienen por qué pertenecer necesariamente al conjunto S.

Axioma 10 (Axioma de completitud)

Todo $S \subset \mathbb{R}$ *no vacío y acotado superiormente admite un supremo. Es decir, existe un* $b \in \mathbb{R}$ *tal que* $b = \sup(S)$.

Axioma 10 (Axioma de completitud)

Todo $S \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente admite un supremo. Es decir, existe un $b \in \mathbb{R}$ tal que $b = \sup(S)$.

- Como consecuencia de este axioma, todo conjunto de $S \subset \mathbb{R}$ no vacío acotado inferiormente admite un ínfimo. En efecto, tomemos el conjunto de los números opuestos a los de S, que denotamos por $-S$. Está claro entonces que $-S$ es un conjunto no vacío y está acotado superiormente, por lo tanto el axioma 10 nos dice que existe un número b que es su supremo. Es evidente que el ínfimo de S es $-b$.

Axioma 10 (Axioma de completitud)

Todo $S \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente admite un supremo. Es decir, existe un $b \in \mathbb{R}$ tal que $b = \sup(S)$.

- Como consecuencia de este axioma, todo conjunto de $S \subset \mathbb{R}$ no vacío acotado inferiormente admite un ínfimo. En efecto, tomemos el conjunto de los números opuestos a los de S, que denotamos por $-S$. Está claro entonces que $-S$ es un conjunto no vacío y está acotado superiormente, por lo tanto el axioma 10 nos dice que existe un número b que es su supremo. Es evidente que el ínfimo de S es $-b$.
- Obsérvese que en $\mathbb{Q}$ no se cumple este axioma. El conjunto $S = \{(1 + \frac{1}{n})^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\} \subset \mathbb{Q}$ no tiene extremo superior o supremo en $\mathbb{Q}$. De hecho, veremos más adelante que su supremo es el número irracional e.

El siguiente teorema establece que todo conjunto de números reales con un supremo contiene números tan próximos como se quiera a dicho supremo.

Teorema 5 (Propiedad de la aproximación.)

Sea $S \subset \mathbb{R}$ *no vacío y* $b = \sup(S)$. *Entonces para todo* $a \in \mathbb{R}$, *siendo* $a < b$, *existe algún* $x \in S$ *tal que* $a < x \leq b$.

El siguiente teorema establece que todo conjunto de números reales con un supremo contiene números tan próximos como se quiera a dicho supremo.

Teorema 5 (Propiedad de la aproximación.)

Sea $S \subset \mathbb{R}$ *no vacío y* $b = \sup(S)$*. Entonces para todo* $a \in \mathbb{R}$*, siendo* $a < b$*, existe algún* $x \in S$ *tal que* $a < x \leq b$*.*

Demostración

Por ser $b = \sup(S)$, sabemos que $x \leq b$ para todo $x \in S$. Por otro lado, si se cumpliese que $x \leq a$ para todo $x \in S$, a sería una cota superior de S menor que el supremo, que por definición es la cota superior mínima. Como esto es imposible, deducimos que ha de ser $x > a$ para algún $x \in S$.

Teorema 6 (Propiedad aditiva.)

Dados A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$, definimos un nuevo conjunto $C = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$. Si tanto A como B tienen supremos, entonces también lo tiene C y viene dado por $\sup(C) = \sup(A) + \sup(B)$.

Teorema 6 (Propiedad aditiva.)

Dados A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$, definimos un nuevo conjunto $C = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$. Si tanto A como B tienen supremos, entonces también lo tiene C y viene dado por $\sup(C) = \sup(A) + \sup(B)$.

Teorema 7 (Propiedad de la comparación.)

Dados S y T dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$, tales que $s \leq t$ para todo $s \in S$ y para todo $t \in T$, si T tiene supremo también lo tiene S, y se cumple que $\sup(S) \leq \sup(T)$.

Teorema 8 (Propiedad arquimediana de los números reales.)

Dado $x > 0$ *e* $y \in \mathbb{R}$ *arbitrario, existe un* $n \in \mathbb{Z}^+$ *tal que* $nx > y$.

Teorema 8 (Propiedad arquimediana de los números reales.)

Dado $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$ arbitrario, existe un $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $nx > y$.

Esto significa que todo segmento lineal de longitud y, por grande que sea, puede recubrirse por medio de un número finito n de segmentos lineales de longitud positiva x dada, por pequeña que sea.

Representación decimal de los números reales.

Para simplificar el tratamiento consideraremos en esta sección sólo los números reales positivos. La extensión a los negativos resultará evidente. Tomemos el número real dado por la siguiente expresión

$$r = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots + \frac{a_n}{10^n},$$

donde a_0 es un entero no negativo y los a_i son enteros que satisfacen la condición $0 \leq a_i \leq 9$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Esta expresión se denomina representación decimal finita de r, y se escribe como $r = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$. Obsérvese que todo número real que pueda escribirse de este modo es necesariamente racional.

Teorema 9

(Aproximación decimal finita de un número real): Supongamos un número real $x \geq 0$*, entonces para todo entero* $n \geq 1$ *existe un decimal finito* $r_n = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ *tal que*

$$r_n \leq x < r_n + \frac{1}{10^n}$$

Teorema 9

(Aproximación decimal finita de un número real): Supongamos un número real $x \geq 0$, entonces para todo entero $n \geq 1$ existe un decimal finito $r_n = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ tal que

$$r_n \leq x < r_n + \frac{1}{10^n}$$

- Los números racionales r_n del teorema anterior pueden utilizarse para definir una representación decimal infinita del número real x.

Teorema 9

(Aproximación decimal finita de un número real): Supongamos un número real $x \geq 0$, entonces para todo entero $n \geq 1$ existe un decimal finito $r_n = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ tal que

$$r_n \leq x < r_n + \frac{1}{10^n}$$

- Los números racionales r_n del teorema anterior pueden utilizarse para definir una representación decimal infinita del número real x.
- El conjunto infinito de los números racionales de esa representación decimal forma una *sucesión* cuyo límite es el número real representado. Simbólicamente escribiríamos $\lim_{n \to \infty} r_n = x$.

- El concepto de sucesión y límite será introducido formalmente más adelante, por ahora basta la idea intuitiva.

- El concepto de sucesión y límite será introducido formalmente más adelante, por ahora basta la idea intuitiva.
- Todo número real puede escribirse como el límite de una sucesión de números racionales de ese tipo (más adelante veremos que se denominan sucesiones de Cauchy). El número entero 4 admite la representación decimal infinita trivial de $4,000000\ldots$ (la representación periódica $3,99999\ldots$, se considera equivalente a la anterior).

- El concepto de sucesión y límite será introducido formalmente más adelante, por ahora basta la idea intuitiva.
- Todo número real puede escribirse como el límite de una sucesión de números racionales de ese tipo (más adelante veremos que se denominan sucesiones de Cauchy). El número entero 4 admite la representación decimal infinita trivial de $4,000000\ldots$ (la representación periódica $3,99999\ldots$, se considera equivalente a la anterior).
- Se puede demostrar que toda representación decimal infinita periódica es un número racional. Ejemplo:

$$42,23\overbrace{678}\,\overbrace{678}\,\overbrace{678}\ldots = \frac{4223678-4223}{99900}$$

Definición 9 (Potencias de base real y exponente entero.)

Dados $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$, se define:

$$x^n = \begin{cases} \overbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{(n)} & si\ n > 0 \\ 1/x^{|n|} & si\ n < 0 \\ 1 & si\ n = 0 \end{cases}$$

Definición 10 (Raíces de los números reales.)

Dados un número real $x > 0$ *y un entero positivo* $n \in \mathbb{Z}^+$*, existe un único número real* $y > 0$ *tal que* $y^n = x$*. Se dice que* y *es la raíz* n*–ésima de* x *y se escribe* $y = \sqrt[n]{x}$*.*

Definición 10 (Raíces de los números reales.)

Dados un número real $x > 0$ *y un entero positivo* $n \in \mathbb{Z}^+$*, existe un único número real* $y > 0$ *tal que* $y^n = x$*. Se dice que* y *es la raíz* n*–ésima de* x *y se escribe* $y = \sqrt[n]{x}$*.*

Definición 11 (Potencias de exponente racional.)

Dados un número real $x > 0$ *y un número racional* p/q*, con* $p \in \mathbb{Z}$ *y* $q \in \mathbb{Z}^+$*, se llama potencia de base* x *y exponente* p/q *al número real* $x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$*.*

Definición 10 (Raíces de los números reales.)

Dados un número real $x > 0$ y un entero positivo $n \in \mathbb{Z}^+$, existe un único número real $y > 0$ tal que $y^n = x$. Se dice que y es la raíz n–ésima de x y se escribe $y = \sqrt[n]{x}$.

Definición 11 (Potencias de exponente racional.)

Dados un número real $x > 0$ y un número racional p/q, con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{Z}^+$, se llama potencia de base x y exponente p/q al número real $x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$.

Definición 12 (Potencias de exponente real.)

Dados un número real $x > 0$ y otro número real $u = \lim\limits_{n\to\infty} r_n$, donde $\{r_n\}$ es una sucesión de números racionales, se define $x^u = \lim\limits_{n\to\infty} x^{r_n}$.

Definición 13 (Logaritmos.)

Dados dos números reales $x > 0$ *y* $u > 0$*, con* $u \neq 1$*, existe un único número real* y *tal que* $u^y = x$*. Este número se denomina logaritmo en base* u *de* x*, y se denota escribiendo* $y = \log_u x$*. Es decir,*
$\log_u x = y \iff u^y = x.$

[2] También denominados logaritmos neperianos en honor del matemático John Neper.

Definición 13 (Logaritmos.)

Dados dos números reales $x > 0$ y $u > 0$, con $u \neq 1$, existe un único número real y tal que $u^y = x$. Este número se denomina logaritmo en base u de x, y se denota escribiendo $y = \log_u x$. Es decir,
$\log_u x = y \iff u^y = x.$

De especial importancia resultan los logaritmos *naturales*[2], cuya base es el número irracional e. Suelen denotarse por $\log x$ ó por $\ln x$.

[2]También denominados logaritmos neperianos en honor del matemático John Neper.

Valor absoluto y desigualdad triangular.

Definición 14

El valor absoluto de un número real x *se denota por* $|x|$ *y se define como*

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x > 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Valor absoluto y desigualdad triangular.

Definición 14

El valor absoluto de un número real x se denota por $|x|$ y se define como

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x > 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Teorema 10

Si $a \geq 0$, se cumple $|x| \leq a$ si, y sólo si, $-|a| \leq x \leq |a|$.

Valor absoluto y desigualdad triangular.

Definición 14

El valor absoluto de un número real x se denota por $|x|$ y se define como

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x > 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Teorema 10

Si $a \geq 0$, se cumple $|x| \leq a$ si, y sólo si, $-|a| \leq x \leq |a|$.

Teorema 11 (Desigualdad triangular.)

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Demostración

Tenemos $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$. Sumando ambas expresiones vemos que $-(|x|+|y|) \leq x+y \leq (|x|+|y|)$, y aplicando el teorema 10 con $a = (|x|+|y|)$ deducimos que $|x+y| \leq |x|+|y|$.

Demostración

Tenemos $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$. Sumando ambas expresiones vemos que $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq (|x| + |y|)$, y aplicando el teorema 10 con $a = (|x| + |y|)$ deducimos que $|x + y| \leq |x| + |y|$.

- Esta expresión se puede generalizar para obtener $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$.

Demostración

Tenemos $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$. Sumando ambas expresiones vemos que $-(|x|+|y|) \leq x+y \leq (|x|+|y|)$, y aplicando el teorema 10 con $a = (|x|+|y|)$ deducimos que $|x+y| \leq |x|+|y|$.

- Esta expresión se puede generalizar para obtener $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$.
- Otro modo de expresar la desigualdad triangular se obtiene poniendo $x = a - c$, $y = c - b$, de donde se deduce que $|a - b| \leq |a - c| + |c - b|$.

Demostración

Tenemos $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$. Sumando ambas expresiones vemos que $-(|x|+|y|) \leq x+y \leq (|x|+|y|)$, y aplicando el teorema 10 con $a=(|x|+|y|)$ deducimos que $|x+y| \leq |x|+|y|$.

- Esta expresión se puede generalizar para obtener $|x_1+x_2+\ldots+x_n| \leq |x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|$.
- Otro modo de expresar la desigualdad triangular se obtiene poniendo $x=a-c$, $y=c-b$, de donde se deduce que $|a-b| \leq |a-c|+|c-b|$.
- Más adelante veremos cómo se define la distancia, pero por ahora puede ser de ayuda observar que a la desigualdad triangular expresada de esta manera puede dársele el siguiente significado: $\mathrm{dist}(a,b) \leq \mathrm{dist}(a,c)+\mathrm{dist}(c,b)$.

La extensión $\mathbb{R}^\star$ de los números reales.

Definición 15

$\mathbb{R}$, junto con los símbolos $+\infty$ y $-\infty$, que satisfacen las siguientes propiedades, se llama sistema ampliado de los números reales, y lo denotaremos por $\mathbb{R}^\star$.

(a) $\forall\, x \in \mathbb{R}$ *se cumple*

$$x + (+\infty) = x - (-\infty) = +\infty,$$

$$x + (-\infty) = x - (+\infty) = -\infty,$$

$$x/(+\infty) = x/(-\infty) = 0.$$

(b) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, *se cumple:*

$$x(+\infty) = +\infty, \quad x(-\infty) = -\infty$$

(c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x < 0$, *se cumple:*

$$x(+\infty) = -\infty, \quad x(-\infty) = +\infty$$

(d) $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty.$
$(-\infty) + (-\infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty.$

(e) *Si* $x \in \mathbb{R}$ *entonces* $-\infty < x < +\infty.$

(c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x < 0$, *se cumple:*

$$x(+\infty) = -\infty, \quad x(-\infty) = +\infty$$

(d) $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty$.
$(-\infty) + (-\infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$.

(e) *Si* $x \in \mathbb{R}$ *entonces* $-\infty < x < +\infty$.

- No están definidas operaciones como $(+\infty)/(+\infty)$, $(+\infty)/(-\infty)$, $0(+\infty)$, $0(-\infty)$, $(+\infty)-(+\infty)$, $(-\infty)-(-\infty)$, aunque sí está definido, por ejemplo, $0/(+\infty) = 0$.

(c) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x < 0$, *se cumple:*

$$x(+\infty) = -\infty, \;\; x(-\infty) = +\infty$$

(d) $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty$.
$(-\infty) + (-\infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$.

(e) *Si* $x \in \mathbb{R}$ *entonces* $-\infty < x < +\infty$.

- No están definidas operaciones como $(+\infty)/(+\infty)$, $(+\infty)/(-\infty)$, $0(+\infty)$, $0(-\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$, aunque sí está definido, por ejemplo, $0/(+\infty) = 0$.

- $\mathbb{R}^\star$ se designará también por $[-\infty, +\infty]$. Los puntos de $\mathbb{R}$ se dicen finitos, mientras que los puntos $+\infty$ y $-\infty$ se dicen infinitos.

Numerabilidad.

Definición 16 (Conjunto finito.)

Se dice que un conjunto es finito *y que tiene n elementos, si se pueden poner en correspondencia uno a uno (biyectiva) con el conjunto* $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. *Un conjunto que no es finito se denomina* infinito.

Numerabilidad.

Definición 16 (Conjunto finito.)

Se dice que un conjunto es finito *y que tiene n elementos, si se pueden poner en correspondencia uno a uno (biyectiva) con el conjunto* $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. *Un conjunto que no es finito se denomina* infinito.

Definición 17 (Conjunto numerable.)

Un conjunto S es numerable si se verifica una de estas dos condiciones:

(a) *S es finito.*

(b) *S es infinito y existe una correspondencia uno a uno entre* $\mathbb{Z}^+$ *y* S.

Numerabilidad.

Definición 16 (Conjunto finito.)

Se dice que un conjunto es finito *y que tiene n elementos, si se pueden poner en correspondencia uno a uno (biyectiva) con el conjunto* $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$*. Un conjunto que no es finito se denomina* infinito*.*

Definición 17 (Conjunto numerable.)

Un conjunto S es numerable si se verifica una de estas dos condiciones:

(a) *S es finito.*

(b) *S es infinito y existe una correspondencia uno a uno entre $\mathbb{Z}^+$ y S.*

También se usan a veces los términos *contable* y *no contable*.

$\mathbb{Q}$ es un conjunto contable

Teorema 12

$\mathbb{Q}$ *es infinito numerable.*

[3] De este modo aparecen repetidos elementos de $\mathbb{Q}$, como $1/1$, $2/2$, etc., pero ello no invalida el argumento.

$\mathbb{Q}$ es un conjunto contable

Teorema 12

$\mathbb{Q}$ es infinito numerable.

Los elementos de $\mathbb{Q}$ se pueden contar siguiendo las diagonales de la siguiente matriz infinita[3].

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\[2ex]
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \frac{2}{6} & \cdots \\[2ex]
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \frac{3}{6} & \cdots
\end{array}$$

[3] De este modo aparecen repetidos elementos de $\mathbb{Q}$, como $1/1$, $2/2$, etc., pero ello no invalida el argumento.

$\mathbb{R}$ es un conjunto no contable

Teorema 13

$\mathbb{R}$ *es infinito no numerable.*

Demostración

Basta demostrar que el subconjunto $(0,1) \subset \mathbb{R}$ es no numerable. Si lo fuese, existiría una sucesión[a] $\{s_n\}$ cuyos términos constituirían todo el intervalo. Escribamos los s_n como decimales infinitos, es decir, $s_n = 0, u_{n_1} u_{n_2} u_{n_3} \ldots$, donde cada $u_{n_i} = 0, 1, \ldots, 9$. Ahora construimos el siguiente número real:

$$y = 0, v_1 v_2 v_3 \ldots, \qquad \text{donde} \qquad v_n = \begin{cases} 1 & \text{si } u_{n_n} \neq 1 \\ 2 & \text{si } u_{n_n} = 1 \end{cases}$$

Ningún término de la sucesión $\{s_n\}$ puede ser igual a y, con lo cual hemos demostrado que los elementos del intervalo $(0,1)$ no pueden ser "contados" (puestos en equivalencia uno a uno con los elementos de una sucesión). El conjunto $(0,1) \subset \mathbb{R}$ no es numerable, y por lo tanto $\mathbb{R}$ tampoco.

[a] Definiremos el concepto de *sucesión* más adelante, pero las nociones previas que el lector probablemente ya tiene sobre sucesiones puede ser

El sistema de números complejos $\mathbb{C}$.

Definición 18

Un número complejo es un par ordenado de números reales, $z = (x, y)$. *Al primer miembro del par se le llama parte real,* $Re(z) = x$, *y al segundo parte imaginaria,* $Im(z) = y$. *Dos números complejos,* $z_1 = (x_1, y_1)$ *y* $z_2 = (x_2, y_2)$, *son iguales si, y sólo si,* $x_1 = x_2$ *e* $y_1 = y_2$.

El sistema de números complejos $\mathbb{C}$.

Definición 18

Un número complejo es un par ordenado de números reales, $z = (x, y)$. Al primer miembro del par se le llama parte real, $Re(z) = x$, y al segundo parte imaginaria, $Im(z) = y$. Dos números complejos, $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$, son iguales si, y sólo si, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

Definición 19

Dados dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$, definimos su suma y su producto como:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \qquad z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

Definición 20

Dado $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ *tal que* $z \neq (0, 0)$, *definimos*

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

Definición 20

Dado $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ *tal que* $z \neq (0, 0)$, *definimos*

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

- $\mathbb{C}$ tiene estructura algebraica de cuerpo.

Definición 20

Dado $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ *tal que* $z \neq (0, 0)$, *definimos*

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

- $\mathbb{C}$ tiene estructura algebraica de cuerpo.
- Los números complejos de la forma $(x, 0)$ tienen las mismas propiedades algebraicas que los números reales.

Definición 20

Dado $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ *tal que* $z \neq (0, 0)$, *definimos*

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

- $\mathbb{C}$ tiene estructura algebraica de cuerpo.
- Los números complejos de la forma $(x, 0)$ tienen las mismas propiedades algebraicas que los números reales.
- El conjunto $\mathbb{C}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{C} \mid y = 0\}$ es isomorfo a $\mathbb{R}$ y, evidentemente, $\mathbb{C}_0 \subset \mathbb{C}$, por lo tanto todo número real es un caso especial de número complejo.

Definición 21

Definimos la unidad imaginaria como $i = (0, 1)$.

- i es solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

Definición 21

Definimos la unidad imaginaria como $i = (0, 1)$.

- i es solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

Teorema 14

Todo $z \in \mathbb{C}$ puede escribirse como $z = x + iy$.

Demostración

$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + iy.$

Definición 21

Definimos la unidad imaginaria como $i = (0, 1)$.

- i es solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

Teorema 14

Todo $z \in \mathbb{C}$ *puede escribirse como* $z = x + iy$.

Demostración

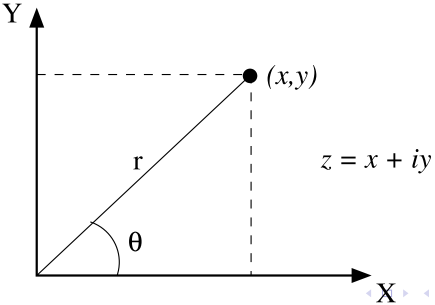
$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + iy.$

Definición 22

Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$. *El conjugado de* z *es* $\bar{z} = x - iy = (x, -y)$.

Representación geométrica de los números complejos.

Podemos hacer corresponder a todo $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ un punto del plano, y sólo uno. Al eje de abscisas se le llama eje real, y al de ordenadas se le llama eje imaginario. Con esta representación, la suma de números complejos coincide con la suma habitual de vectores en el plano. El conjugado de z es el vector simétrico respecto del eje real.



Coordenadas polares. I

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia del punto (x, y) al origen $(0, 0)$ en el plano. Se denomina módulo del número complejo $z = x + iy$, o también valor absoluto.
- El módulo de un número complejo verifica las mismas propiedades que el valor absoluto de los números reales, al cual se reduce en el caso particular de que la parte imaginaria de z sea cero.
- $\theta = \operatorname{arc\,tg}(y/x)$ es el ángulo que forma el vector de posición de (x, y) con el eje real (eje x). Se denomina argumento de z, y se escribe como $\arg(z)$.

Coordenadas polares. II

- El valor de θ que cumple $\theta \in (-\pi, +\pi]$ se denomina *argumento principal* de z.

Definición 23

Argumento de un número complejo. Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$ un número complejo no nulo. El único número real θ que satisface las condiciones

$$x = |z| \cos(\theta), \quad y = |z| \operatorname{sen}(\theta), \quad -\pi < \theta \leq +\pi$$

se llama el argumento principal de z y se denota por $\theta = \arg(z)$.

Coordenadas polares. III

- Algunas propiedades del módulo de los números complejos:

$$|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0.$$

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|, \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ si } z_2 \neq 0, \quad z\bar{\bar{z}} = |z|^2$$

Exponencial compleja.

Definición 24

Exponencial compleja: Dado $z = x + iy \in \mathbb{C}$*, definimos* $e^z = e^{x+iy}$ *como el número complejo* $e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$.

Exponencial compleja.

Definición 24

Exponencial compleja: Dado $z = x + iy \in \mathbb{C}$, definimos $e^z = e^{x+iy}$ como el número complejo $e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$.

- Obsérvese que la exponencial compleja cumple las propiedades usuales de la exponencial real. Por ejemplo, $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$. Obsérvese que e^z jamás es cero. Si $x \in \mathbb{R}$ entonces $|e^{ix}| = 1$. Por otro lado, $e^z = 1$ si, y sólo si, z es un múltiplo de $2\pi i$.

Exponencial compleja.

Definición 24

Exponencial compleja: Dado $z = x + iy \in \mathbb{C}$, definimos $e^z = e^{x+iy}$ como el número complejo $e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$.

- Obsérvese que la exponencial compleja cumple las propiedades usuales de la exponencial real. Por ejemplo, $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$. Obsérvese que e^z jamás es cero. Si $x \in \mathbb{R}$ entonces $|e^{ix}| = 1$. Por otro lado, $e^z = 1$ si, y sólo si, z es un múltiplo de $2\pi i$.
- Usando la definición de exponencial compleja, todo número complejo $z \neq 0$ puede escribirse como $z = re^{i\theta}$, donde r es su módulo y θ su argumento. Esta notación polar es muy útil para la multiplicación y la división de números complejos.

Raíces complejas.

Teorema 15

Si $z \neq 0$ es un número complejo y $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces existen exactamente n números complejos distintos, $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$, llamados raíces n-ésimas de z, tales que $z_k^n = z$ para todo $k = 0, 1, 2, \ldots n-1$. Estas raíces están dadas por la fórmula

$$z_k = |z|^{1/n} e^{i\phi_k}, \quad \text{con} \quad \phi_k = \frac{\arg(z)}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots n-1$$

Raíces complejas.

Teorema 15

Si $z \neq 0$ es un número complejo y $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces existen exactamente n números complejos distintos, $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$, llamados raíces n-ésimas de z, tales que $z_k^n = z$ para todo $k = 0, 1, 2, \ldots n-1$. Estas raíces están dadas por la fórmula

$$z_k = |z|^{1/n} e^{i\phi_k}, \quad \text{con} \quad \phi_k = \frac{\arg(z)}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots n-1$$

- Estas raíces están distribuidas equidistantemente sobre el círculo centrado en el origen y de radio $r = |z|^{1/n}$.

Logaritmos complejos.

Definición 25

Logaritmos complejos. Sea $z \neq 0$ un número complejo. Si w es otro número complejo tal que $e^w = z$, entonces w se denomina un logaritmo de z. El valor particular dado por $w = \log|z| + i \arg(z)$ se llama logaritmo principal de z, y lo denotaremos por.

$$w = \mathrm{Log}(z) = \log|z| + i \arg(z)$$

Logaritmos complejos.

Definición 25

Logaritmos complejos. Sea $z \neq 0$ un número complejo. Si w es otro número complejo tal que $e^w = z$, entonces w se denomina un logaritmo de z. El valor particular dado por $w = \log|z| + i\arg(z)$ se llama logaritmo principal de z, y lo denotaremos por.

$$w = \mathrm{Log}(z) = \log|z| + i\arg(z)$$

- Todo número complejo de la forma $\log|z| + i\arg(z) + i2n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$, es también un logaritmo de z.

Potencias complejas.

Definición 26

Potencias complejas. Dado un número complejo $z \neq 0$ *y* $\omega \in \mathbb{C}$ *cualquiera, definimos*

$$z^w = e^{w\mathrm{Log}(z)}$$

Potencias complejas.

Definición 26

Potencias complejas. Dado un número complejo $z \neq 0$ y $\omega \in \mathbb{C}$ cualquiera, definimos

$$z^w = e^{w\mathrm{Log}(z)}$$

- Definimos las potencias de z sólo en términos de su logaritmo principal, $\mathrm{Log}(z)$.

Potencias complejas.

Definición 26

Potencias complejas. Dado un número complejo $z \neq 0$ *y* $\omega \in \mathbb{C}$ *cualquiera, definimos*

$$z^w = e^{w\mathrm{Log}(z)}$$

- Definimos las potencias de z sólo en términos de su logaritmo principal, $\mathrm{Log}(z)$.
- Si no lo hacemos así encontraríamos dificultades en el caso especial de la exponenciación compleja, porque la notación $e^{i\theta}$ podría representar múltiples números complejos:

- En efecto, si aplicamos la definición $z^w = e^{w\mathrm{Log}(z)}$ para $z = e$ y sustituímos el logaritmo principal por otro cualquiera, por ejemplo $\log(e) = 1 + i2\pi$, tendríamos lo siguiente:

$$e^{i\theta} = e^{i\theta \log(e)} = e^{i\theta(1+i2\pi)} = e^{-2\pi\theta+i\theta} = e^{-2\pi\theta}e^{i\theta}.$$

- Mientras que si usamos $\mathrm{Log}(e) = 1$, tenemos: $e^{i\theta} = e^{i\theta\,\mathrm{Log}(e)} = e^{i\theta}$.

Funciones trigonométricas circulares.

Definición 27

Dado $z \in \mathbb{C}$ definimos:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Funciones trigonométricas circulares.

Definición 27

Dado $z \in \mathbb{C}$ definimos:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

- Cuando z es un número real la aplicación de la definición anterior nos lleva al seno y coseno usual de un número real. En general los senos y cosenos de números complejos pueden ser mayores que la unidad.

- Ejemplo:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + i\log 2\right) = \frac{e^{i(\pi/2+i\log 2)} - e^{-i(\pi/2+i\log 2)}}{2i}$$

$$= \frac{e^{i\pi/2}e^{-\log 2} - e^{-i\pi/2}e^{\log 2}}{2i} = \frac{i(1/2) - (-i)(2)}{2i} = \frac{5}{4}$$

Funciones trigonométricas hiperbólicas.

- El $\text{sen}(z)$ y el $\cos(z)$ cuando z es imaginario puro, es decir, $z = iy$, conducen a:

$$\cos(iy) = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} \qquad \text{sen}(iy) = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = i\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$$

Funciones trigonométricas hiperbólicas.

- El $\text{sen}(z)$ y el $\cos(z)$ cuando z es imaginario puro, es decir, $z = iy$, conducen a:

$$\cos(iy) = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} \qquad \text{sen}(iy) = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = i\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$$

- La combinación de funciones reales resultantes para y reciben el nombre de funciones coseno y seno hiperbólico.

$$\cosh(y) = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} \qquad \text{senh}(y) = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$$

Funciones trigonométricas hiperbólicas.

- El $\operatorname{sen}(z)$ y el $\cos(z)$ cuando z es imaginario puro, es decir, $z = iy$, conducen a:

$$\cos(iy) = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} \qquad \operatorname{sen}(iy) = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = i\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$$

- La combinación de funciones reales resultantes para y reciben el nombre de funciones coseno y seno hiperbólico.

$$\cosh(y) = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} \qquad \operatorname{senh}(y) = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$$

- Se verifica: $\cos(iy) = \cosh(y)$, $\operatorname{sen}(iy) = i\operatorname{senh}(y)$.

Senos y cosenos hiperbólicos.

Definición 28

Dado $z \in \mathbb{C}$ definimos:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Senos y cosenos hiperbólicos.

Definición 28

Dado $z \in \mathbb{C}$ definimos:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

- En los ejercicios veremos que se verifica $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$.

Senos y cosenos hiperbólicos.

Definición 28

Dado $z \in \mathbb{C}$ definimos:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

- En los ejercicios veremos que se verifica $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$.
- Si tomamos $x \in \mathbb{R}$, podemos aprovechar la expresión $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$ para escribir las coordenadas de los puntos de la rama derecha de la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = 1$ como $(\cosh\theta, \operatorname{senh}\theta)$, con $\theta \geq 0$. De ahí la denominación de funciones hiperbólicas.